Observabilité, stabilisation des solutions de l'équation des ondes avec un domaine dépendant du temps

Ahmed Bchatnia

UR Analyse non-linéaire et géométrie, UR13ES32,
Faculté des Sciences de Tunis,
Université de Tunis El Manar

Plan de la présentation

Introduction

- On considère l'équation des ondes

$$(E_L)\begin{cases} \partial_t^2 u - \triangle u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}\times\Omega \\ u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}\times\partial\Omega \\ (u(0),\partial_t u(0)) = (u^0,u^1) \in H = H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega) \end{cases}$$

- On définit l'énergie par

$$E(u,t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\partial_t u(t)|^2 + |\nabla_x u(t)|^2)dx.$$

- **Objectif** : faire décroître l'énergie uniformément en ajoutant à l'équation un terme dissipatif.

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \triangle u + a(x)\partial_t u = 0 \qquad \text{sur } \mathbb{R} \times \Omega \\ u = 0 \qquad \text{sur } \mathbb{R} \times \partial\Omega \\ (u(0), \partial_t u(0)) = (u^0, u^1) \text{ dans } H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \end{cases}$$

$$E(u,T) - E(u,0) = -\int_0^T \int_\Omega a(x) \mid \partial_t u(t,x) \mid^2 dtdx.$$

Si $a(x) \geq 0$ alors $E(u,t) \searrow$.

- **Stratégie :** On suppose que

$$E(u,0) \leq \int_0^T \int_\Omega a(x) \mid \partial_t u(t,x) \mid^2 dtdx \hookleftarrow \text{Observabilité}$$

$$\Downarrow$$

$$E(u,t) \searrow\searrow \text{ exp.}$$

- Bardos, Lebeau et Rauch (1990) :

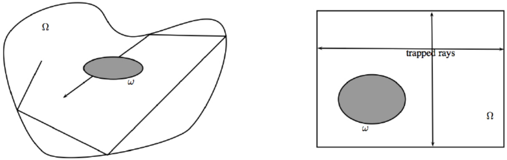
$$\text{CCG} \Rightarrow E(u,t) \leq Ce^{-\alpha t} E(u,0).$$

- Bardos, Lebeau et Rauch (1992) :

$$\text{estimation d'observabilité} \Leftrightarrow \text{CCG}$$

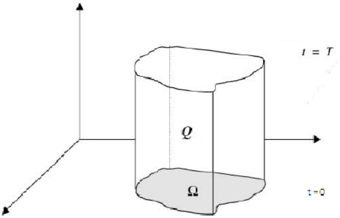
La condition de contrôle géométrique

Soit ω un ouvert de Ω, $T > 0$. On dit que le couple (ω, T) vérifie la condition de contrôle géométrique si :
Tout chemin bicaractéristique généralisé de Ω, issue à l'instant $t = 0$, rencontre $\mathbb{R}_+ \times \omega$ entre les instants 0 et T.



Contrôlabilité exacte et équations de type ondes

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$ dans les applications), de frontière assez régulière $\Gamma = \partial\Omega$.
Soit $T > 0$ un temps positif donné.
On définit un cylindre $Q = \Omega \times]0, T[$ de frontière latérale $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$.



Le cylindre espace-temps

On considère dans Q un système dont l'état $u = u(x,t)$ décrit par l'équation des ondes

$$\partial_t^2 u - \triangle u = 0 \text{ dans } Q. \tag{1}$$

Soient les conditions initiales

$$u(0) = u_0, \partial_t u(0) = u_1 \text{ dans } \Omega, \tag{2}$$

avec une condition aux limites non-homogène de type Dirichlet

$$u = v \text{ sur } \Sigma = \Gamma \times]0, T[, \tag{3}$$

où $v = v(x,t)$ est le contrôle qui modélise l'action au bord Σ sur le système.
Ce système d'évolution décrit, par exemple, les vibrations d'un corps n-dimensionnel soumis à l'action d'une force v sur la frontière Γ (sur son bord) et partant d'un état initial décrit par les données $\{u_0, u_1\}$.

La question posée est :Comment arrêter ces vibrations ?
C'est-à-dire : Quel est le contrôle qui ramène au repos les vibrations à l'instant T ?
Le problème étudié est le suivant : Soit $T > 0$ donné, peut-on, pour tout couple $\{u_0, u_1\}$ donné dans un espace convenable, trouver un contrôle v qui ramène le système à l'état d'équilibre $\{0, 0\}$ à l'instant T, c'est-à-dire on veut que la solution $u = u(x, t, v)$ vérifie la condition

$$u(x, T, v) = \partial_t u(x, T, v) = 0 \text{ dans } \Omega. \tag{4}$$

Si cela est possible, on dit alors que le système est **exactement contrôlable** à l'instant T.
Dans les applications, c'est rare de trouver des systèmes qui l'on peut contrôler sur tout le bord. Pour cette raison nous considérons l'action du contrôle uniquement sur une partie du bord.

Dans ce cas, considérons une partie ouverte non vide Σ_0 de Σ et on agit sur le système par la condition aux limites suivante :

$$u = \begin{cases} v \text{ sur } \Sigma \\ 0 \text{ sur } \Sigma \setminus \Sigma_0 \end{cases} \tag{5}$$

La formulation du problème de la contrôlabilité exacte est maintenant la suivante : "Étant donné un temps $T > 0$ et des conditions initiales $\{u_0, u_1\}$ données dans un espace convenable, existe-t-il un contrôle v définit sur Σ_0 tel que si $u = u(v)$ est la solution de (1), (2) et (3) on ait (5) ?"
Notre objectif est d'étudier ce problème de contrôlabilité exacte. Pour cela, on introduit les idées principales de la méthode d'unicité hilbertienne **HUM** qui nous allons utiliser pour résoudre le système (1), (2) et (4).

Description de la méthode HUM

Etape 1

Soit $(\phi_0, \phi_1) \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$, on considère l'équation des ondes homogène

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t^2 \phi - \triangle \phi = 0 \text{ dans } Q \\ \phi = 0 \text{ sur } \Sigma \\ \phi(0) = \phi_0, \partial_t \phi(0) = \phi_1 \text{ dans } \Omega \end{array} \right. \tag{6}$$

Le problème (6) admet une solution unique $\phi = \phi(x, t)$ qui satisfait la propriété de régularité suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma), \tag{7}$$

où ν désigne le vecteur normal extérieur à Ω et $\frac{\partial}{\partial \nu}$ la dérivée dans cette direction c'est-à-dire $\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = \nabla \phi \cdot \nu = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \nu_k$.

Etape 2 :

Ensuite, on résout le problème "rétrograde"

$$\begin{cases} \partial_t^2\psi - \triangle \psi = 0 \text{ dans } Q \\ \psi = \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \text{ sur } \Sigma_0 \\ 0 \text{ sur } \Sigma \setminus \Sigma_0 \end{cases} \\ \psi(T) = 0, \partial_t\psi(T) = 0 \text{ dans } \Omega \end{cases} \tag{8}$$

Le problème (8) est un système rétrograde non-homogène, car on a une condition finale

$$\psi(T) = 0, \partial_t\psi(T) = 0 \text{ dans } \Omega$$

et des conditions aux limites non-homogène. Cela ne change pas le caractère "bien posé" du système, qui admet donc une solution unique.
On définit l'opérateur linéaire $\triangle : \triangle\,(\phi_0, \phi_1) = (\partial_t\psi(0), -\psi(0))$.

Étape 3 :

On montre que

$$\langle \triangle\, (\phi_0, \phi_1), (\tilde{\phi}_0, \tilde{\phi}_1)\rangle = \int_{\Sigma_0} \frac{\partial \phi}{\partial \nu}\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \nu} d\Gamma dt.$$

et en particulier

$$\langle \triangle\, (\phi_0, \phi_1), (\phi_0, \phi_1)\rangle = \langle \partial_t \psi(0), \phi_0\rangle - \langle \psi(0), \phi_1\rangle = \int_{\Sigma_0} (\frac{\partial \phi}{\partial \nu})^2 d\Gamma dt.$$

Si nous savons montrer que cette forme bilinéaire continue est coercive, d'après le lemme de Lax-Milgram, nous aurons :

$$\forall (\psi(0), \partial_t \psi(0)), \exists ! (\phi_0, \phi_1) \text{ vérifiant } \triangle\, (\phi_0, \phi_1) = (\partial_t \psi(0), -\psi(0)),$$

c'est-à-dire que nous aurons résolu le problème de contrôlabilité exacte pour (1).

La coercivité de la forme bilinéaire équivaut à

$$\int_{\Sigma_0} (\frac{\partial \phi}{\partial \nu})^2 d\Gamma dt \geq E(\phi, 0).$$

Donc l'obtention de cette inégalité d'observabilité est une condition suffisante pour obtenir la contrôlabilité exacte.

Le cas non-cylindrique

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad \text{for} \quad 0 < x < a(t),\ t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x),\ \ 0 < x < a(0), \end{cases} \tag{9}$$

$(\phi, \psi) \in H^1((0, a(0))) \times L^2((0, a(0)))$, avec les conditions aux limites :

$$u(0,t) = 0 \quad \text{et} \ \ u(a(t),t) = 0,\ t > 0, \tag{10}$$

ou

$$u(0,t) = 0 \ \ \text{et} \quad u_x(a(t),t) = 0,\ t > 0, \tag{11}$$

avec a est une fonction continue, strictement positive et 1-périodique.

On note D_p l'ensemble des fonctions continues, strictement croissante et qui s'écrivent sous la forme $x + g(x)$, $g(x)$ est une fonction continue et 1-périodique.

Proposition 1 (Herman)

Si a est une fonction 1-périodique alors

$$F := (I + a) \circ (I - a)^{-1} \in D_p. \tag{12}$$

De plus le nombre de rotation $\rho(F)$ défini par

$$\rho(F) = \lim_{n \to \infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$$

existe et cette limite est indépendante de $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 2 (Herman, Yoccoz)

Soit $a(t)$ une fonction 1-périodique, $a(t) > 0$, on suppose aussi que $|a'(t)| < 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\rho(F) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Il existe alors $H \in D_p$ vérifiant

$$H \circ F = H + \rho(F). \tag{13}$$

A l'aide de H, on construit une transformation $\Phi : [0, a(t)] \times \mathbb{R} \to [0, \rho(F)/2] \times \mathbb{R}$ qui préserve le D'Alembertien.

Hypothèse 1

On suppose qu'il existe $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ tels que

$$\lambda_1 \leq H'(t) \leq \lambda_2,\ t \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Exemple

$$\bullet\, a(t) := \begin{cases} \alpha t + \frac{\alpha(1-\alpha)(1+\beta)}{2(\alpha-\beta)} & \text{si } \frac{\alpha(1+\beta)}{2(\alpha-\beta)} \leq t \leq \frac{\alpha(1+\beta)-2\beta}{2(\alpha-\beta)}, \\ \beta t - \beta + \frac{\alpha(1-\beta^2)}{2(\alpha-\beta)} & \text{si } \frac{\alpha(1+\beta)-2\beta}{2(\alpha-\beta)} \leq t \leq \frac{\alpha(3+\beta)-2\beta}{2(\alpha-\beta)}, \end{cases} \tag{15}$$

avec $-1 < \beta < 0 < \alpha < 1$.

$$\bullet F(x) := (I+a)\circ(I-a)^{-1}(x) = \begin{cases} l_1 x + F_0 & \text{si } 0 \leq x \leq x_0, \\ l_2 x + F_0 + 1 - l_2 & \text{si } x_0 < x < 1, \end{cases}$$

avec $l_1 := \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$, $l_2 := \frac{1+\beta}{1-\beta}$, $F_0 := \frac{l_2(l_1-1)}{l_1-l_2}$ et $x_0 := \frac{1-l_2}{l_1-l_2}$.

Le nombre de rotation est donné par l'expression :

$$\rho(F) = \frac{\ln l_1}{\ln\left(\frac{l_1}{l_2}\right)}, \tag{16}$$

et la fonction H est donnée par

$$H(x) = h_0 \ln\left(|x + h_1|\right) + h_2,$$

où $h_0 = \frac{1}{\ln\left(\frac{l_1}{l_2}\right)}$, $h_1 = \frac{l_2}{l_1 - l_2}$ et $h_2 = -\ln(h_1)$.
H vérifie l'inégalité :

$$\frac{1}{\ln(\frac{l_1}{l_2})} \frac{l_1 - l_2}{l_1} \leq H'(x) \leq \frac{1}{\ln(\frac{l_1}{l_2})} \frac{l_1 - l_2}{l_2}. \tag{17}$$

Observabilité Neumann

Théorème 1 (Ammari-B-El Mufti)

Sous l'hypothèse 1 et pour tout $T \geq \rho(F)$, il existe une constante $C^* > 0$ telle que pour toute solution u du système (9) avec des conditions aux limites (10) de type Dirichlet et pour des données initiales $(\phi, \psi) \in H_0^1(0, a(0)) \times L^2(0, a(0))$, on a :

$$\int_0^T |\, u_x(a(t), t)|^2 \, dt \geq C^* \left(\|\phi\|^2_{H_0^1(0,a(0))} + \|\psi\|^2_{L^2(0,a(0))} \right). \tag{18}$$

Remarque 1

Le temps d'observabilité $\rho(F)$ est optimal : si a est constant il est donné par $2a = \rho(F)$.

Observabilité Neumann

Théorème 1 (Ammari-B-El Mufti)

Sous l'hypothèse 1 et pour tout $T \geq \rho(F)$, il existe une constante $C^* > 0$ telle que pour toute solution u du système (9) avec des conditions aux limites (10) de type Dirichlet et pour des données initiales $(\phi, \psi) \in H_0^1(0, a(0)) \times L^2(0, a(0))$, on a :

$$\int_0^T |\, u_x(a(t), t)|^2 \, dt \geq C^* \left(\|\phi\|^2_{H_0^1(0,a(0))} + \|\psi\|^2_{L^2(0,a(0))} \right). \tag{18}$$

Remarque 1

Le temps d'observabilité $\rho(F)$ est optimal : si a est constant il est donné par $2a = \rho(F)$.

Application : contrôlabilité exacte

La controlabilité exacte pour le système :

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad \text{for} \quad 0 < x < a(t),\ t > 0, \\ u(0,t) = 0 \quad \text{and} \quad u(a(t),t) = r(t),\ t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \ \ 0 < x < a(0) \end{cases} \tag{19}$$

à l'instant T

$\Leftrightarrow$

$\forall\ (\phi, \psi) \in L^2(0, a(0)) \times H^{-1}(0, a(0))$, trouver $r \in L^2(0, T)$ tel que la solution de (19) vérifie $u(., T) = 0, u_t(., T) = 0$ sur $(0, a(T))$.

L'inégalité d'observabilité + la fonction *a* donnée par (15), on obtient :

Corollaire 1

Il existe $r \in L^2(0, T)$ *tel que le système (19) est* ***exactement contrôlable*** *à l'instant* $T := \left| e^{\frac{\rho(F) - h_2}{h_0}} - h_1 \right|$.
Notons que T *est optimal puisqu'il dérive d'un temps d'observabilité optimal.*

Observabilité Dirichlet

Pour le problème avec des conditions aux limites mixtes on va supposer :

Hypothèse 2

La fonction $b(t) := \dfrac{H'(a(t)+t) - H'(-a(t)+t)}{H'(a(t)+t) + H'(-a(t)+t)}$ *vérifie*

$$c_1 \leq b(t) \leq c_2, \quad c_1, c_2 > 0, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{20}$$

Pour $a(t)$ donnée par (15), on a :

$$b(t) = \frac{a(t)}{t + \frac{l_2}{l_1 - l_2}}.$$

Cette fonction vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$2\,a_{min}\,\frac{\alpha-\beta}{1-\beta} \leq 2\,a(t)\,\frac{\alpha-\beta}{1-\beta} \leq b(t) \leq 2\,a(t)\,\frac{\alpha-\beta}{1+\beta} \leq 2\,a_{max}\,\frac{\alpha-\beta}{1+\beta}. \tag{21}$$

Théorème 2 (Ammari-B-El Mufti)

Sous les hypothèses 1 et 2, pour tout $T \geq \rho(F)$*, il existe une constante* $C^* > 0$ *telle que pour toute solution u du système (9) avec conditions aux limites mixtes (11) et* $(\phi, \psi) \in H_l^1(0, a(0)) \times L^2(0, a(0))$,

$$\int_0^T |u_t(a(t), t)|^2 \, dt \geq C^* \left(\|\phi\|^2_{H_l^1(0,a(0))} + \|\psi\|^2_{L^2(0,a(0))} \right), \tag{22}$$

où $H_l^1(0, a(0)) = \{ f \in H^1(0, a(0)) \text{ telle que } f(0) = 0 \}$.

Stabilité exponentielle

On considère maintenant le système suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad \text{pour} \quad 0 < x < a(t),\ t > 0, \\ u(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad u_t(a(t),t) + f(t)u_x(a(t),t) = 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x)\ \ 0 < x < a(0), \end{cases} \tag{23}$$

avec $(\phi, \psi) \in H_l^1((0, a(0))) \times L^2((0, a(0)))$.
Notons

$$E_u(t) = \frac{1}{2} \int_0^{a(t)} \left[|u_t(x,t)|^2 + |u_x(x,t)|^2 \right] dx$$

l'énergie de la solution u.
Objectif $f(t) =$? pour que $E_u(t) \searrow\searrow$ exp.

Théorème 3 (Ammari-B-EM)

Pour

$$f(t) = \frac{(\mu - 1)H'(a(t)+t) + (\mu+1)H'(-a(t)+t)}{(1-\mu)H'(a(t)+t) + (\mu+1)H'(-a(t)+t)} \tag{24}$$

avec $\mu > 0$ *et que la fonction H vérifie l'hypothèse 1 alors :*

- *pour* $\mu \neq 1$*, il existe* $C > 0$ *telle que*

$$E_u(t) \leq Ce^{-\omega t} E_u(0), \tag{25}$$

pour toute u solution de (23) avec

$(\phi, \psi) \in H_l^1((0, a(0))) \times L^2((0, a(0)))$ *et* $\omega = \ln\left(\left|\frac{1+\mu}{1-\mu}\right|\right)$.

- *pour* $\mu = 1$ *qui correspond à* $f(t) = 1$*, on obtient*

$$E_u(t) = 0, \text{ pour tout } t \geq T_0 := (I + a)^{-1} \circ H^{-1}\left(\frac{3\rho(F)}{2}\right). \tag{26}$$

Références

[1] *A remark on observability of the wave equation with moving boundary,* avec K. Ammari et K. El Mufti.
Journal of Applied Analysis, **2017**, Vol 23,(1) , 43–51.

[2] *Stabilization of the wave equation with moving boundary,* avec K. Ammari et K. El Mufti.
European Journal of Control, **2018**, Vol 39, 35–38.

Merci pour votre attention !